Метод применения универсальной тригонометрической подстановки.

Метод применим к любым уравнениям вида

$$R(\sin x, \cos x) = 0,$$

где R — символ некоторого рационального выражения. Основан этот метод на следующих рассуждениях.
Если $x \neq \pi + 2\pi n$, то справедливы следующие тождества:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \ \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Поэтому подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ преобразует уравнение $R(\sin x, \cos x) = 0$ в уравнение

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 0.$$

Левая часть этого уравнения является рациональным выражением с одной переменной t. Значит, указанная подстановка привела тригонометрическое уравнение к рациональному виду. Подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ принято называть *универсальной подстановкой.*
Поскольку использование универсальной подстановки возможно лишь при $x \neq \pi + 2\pi n$, нужно всегда специально проверять, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi n$ решениями заданного уравнения.

Пример.
Решить уравнение

$$\cos x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1.$$

Решение:
ОДЗ: $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.
Применяем метод универсальной тригонометрической подстановки:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1.$$

Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, тогда

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 1,$$
$$1 - t^2 + t + t^3 = 1 + t^2,$$
$$t^3 - 2t^2 + t = 0,$$
$$t(t-1)^2 = 0,$$
$$\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

Корни уравнения входят в ОДЗ.
Ответ: $x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}.$

Метод оценок.
В уравнениях вида
$$R(\sin kx,\ \cos mx) = 0, \tag{1}$$
используя оценки
$$-1 \le \sin kx \le 1,\ -1 \le \cos mx \le 1,$$
подбором находим значения $\sin kx = a$ и $\cos mx = b$, такие, при подстановке которых в исходное уравнение получаем верное равенство, т.е. $R(a,b) = 0$. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} \sin kx = a, \\ \cos mx = b. \end{cases}$$
Решая эту систему, находим корни x исходного уравнения (1).

Пример. Рассмотрим уравнение
$$\sin 5x + \sin 9x = 2.$$
Так как оба синуса не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено лишь в том случае, когда *они равны единице одновременно*:
$$\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$
Таким образом, должны одновременно выполняться следующие неравенства:
$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9},\ n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
Найдём значения x, которые удовлетворяют обоим равенствам:
$$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}.$$
Умножаем обе части на 90 и сокращаем на π:
$$\begin{gathered} 9 + 36n = 5 + 20k, \\ 20k = 36n + 4, \\ 5k = 9n + 1. \end{gathered}$$
Правая часть, как видим, должна делиться на 5. Число n при делении на 5 может давать остатки от 0 до 4; иначе говоря, число n может иметь один из следующих пяти видов: $5m,\ 5m+1,\ 5m+2,\ 5m+3,\ 5m+4$, где $m \in \mathbb{Z}$. Для того, чтобы $9n+1$ делилось на 5, годится лишь $n = 5m+1$.
Искать k, в принципе, уже не нужно. Сразу находим x:
$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi(5m+1)}{5} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$
Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Метод сведения уравнения к решению системы уравнений относительно новых переменных.
Если задано тригонометрическое уравнение

$$R(\cos x, \sin x) = 0, \tag{1}$$

то, добавляя основное тригонометрическое тождество, получим систему уравнений относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{cases} R(\cos x, \sin x) = 0, \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{cases}$$

Произведя замену переменных

$$a = \cos x,\ b = \sin x,\ |a| \leq 1,\ |b| \leq 1$$

и учитывая область допустимых значений уравнения (1), решаем получившуюся систему относительно переменных a и b. Далее производим обратную замену переменных и находим решения исходного уравнения (1).

Пример.

$$3\sin 3x + 4\cos 3x = 5.$$

Решение:
Используя основное тригонометрическое тождество $\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$, данное уравнение можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} 3\sin 3x + 4\cos 3x = 5, \\ \cos^2 3x + \sin^2 3x = 1. \end{cases}$$

Введём новые переменные:

$$a = \cos 3x,\ b = \sin 3x,\ |a| \leq 1,\ |b| \leq 1.$$

$$\begin{cases} 3b + 4a = 5, \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5-4a}{3}, \\ a^2 + \left(\frac{5-4a}{3}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

$$25 - 40a + 16a^2 + 9a^2 = 9,$$

$$25a^2 - 40a + 16 = 0,$$

$$(5a - 4)^2 = 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} a = \frac{4}{5}, \\ b = \frac{3}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = \frac{4}{5}, \\ \sin 3x = \frac{3}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = \frac{3}{5}, \\ 3x \in \text{I четверть}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$3x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{1}{3}\arcsin \frac{3}{5} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{5} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.

1)

$$2\sin x - 3\cos x = 3.$$

В силу того, что $|\sin x| \le 1,\ |\cos x| \le 1$, то уравнение имеет решения, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -1. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \frac{12}{13}, \\ \cos x = -\frac{5}{13}. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \\ \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{12}{13} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm(\pi - \arccos \frac{5}{13}) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arccos \frac{5}{13} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \arccos \frac{5}{13} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

2)

$$2\sin x - 3\cos x = 3.$$

1. Проверка значения $x = \pi + 2\pi n$:

$$2\sin(\pi + 2\pi n) - 3\cos(\pi + 2\pi n) = 3,$$
$$0 + 3 = 3$$

   Верное тождество, значит $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ — решение уравнения.

2. Сделаем замену:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$2 \cdot \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 3 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 3,$$

   Пусть $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\frac{4t}{1+t^2} - \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} = 3,$$
$$4t - 3 + 3t^2 = 3 + 3t^2,$$
$$t = 1,5 \Rightarrow$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1,5 \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} 1,5 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = 2\operatorname{arctg} 1,5 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

3)

$$2\sin x - 3\cos x = 3.$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\begin{cases} 2\sin x - 3\cos x = 3, \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

Пусть $a = \sin x,\ b = \cos x,\ |a| \le 1,\ |b| \le 1$:

$$\begin{cases} 2a - 3b = 3, \\ a^2 + b^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{2a-3}{3}, \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$a^2 + \frac{4a^2 - 12a + 9}{9} = 1,$$

$$9a^2 + 4a^2 - 12a = 0 \Rightarrow a(13a - 12) = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0, \\ b = -1. \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{12}{1}, \\ b = -\frac{5}{13}. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -1. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \frac{12}{1}, \\ \cos x = -\frac{5}{13}. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arccos\frac{5}{13} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \arccos\frac{5}{13} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$