3. Метод сведения уравнения к решению системы уравнений относительно новых переменных.

Пример. Решить уравнение

$$3\sin 3x + 4\cos 3x = 5.$$

Решение: используя основное тригонометрическое тождество $\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$, данное уравнение можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} 3\sin 3x + 4\cos 3x = 5, \\ \cos^2 3x + \sin^2 3x = 1. \end{cases}$$

Введём новые переменные:

$$a = \cos 3x,\ b = \sin 3x,\ |a| \le 1,\ |b| \le 1.$$

$$\begin{cases} 3b + 4a = 5, \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5-4a}{3}, \\ a^2 + \left(\frac{5-4a}{3}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

$$25 - 40a + 16a^2 + 9a^2 = 9,$$
$$25a^2 - 40a + 16 = 0,$$
$$(5a-4)^2 = 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} a = \frac{4}{5}, \\ b = \frac{3}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = \frac{4}{5}, \\ \sin 3x = \frac{3}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 3x = \frac{3}{5}, \\ 3x \in \text{I четверть}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$3x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$
$$x = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{5} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{5} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$

2.Метод применения универсальной тригонометрической подстановки.

Пример.Решить уравнение

$$\cos x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1.$$

Решение:
ОДЗ: $\frac{x}{2} \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \ne \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$
Применяем метод универсальной тригонометрической подстановки:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1.$$

Пусть $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, тогда

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 1,$$
$$1 - t^2 + t + t^3 = 1 + t^2,$$
$$t^3 - 2t^2 + t = 0,$$
$$t(t-1)^2 = 0,$$
$$\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

Корни уравнения входят в ОДЗ.
Ответ: $x = 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ k, m \in \mathbb{Z}.$

1. Метод оценок.

Пример. Решить уравнение

$$\sin 5x + \sin 9x = 2.$$

Решение: так как оба синуса не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено лишь в том случае, когда *они равны единице одновременно*:

$$\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$

Таким образом, должны одновременно выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}. \end{cases}$$

Найдём значения x, которые удовлетворяют обоим равенствам:

$$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}.$$

Умножаем обе части на 90 и сокращаем на π:

$$9 + 36n = 5 + 20k,$$
$$20k = 36n + 4,$$
$$5k = 9n + 1.$$

Правая часть, как видим, должна делиться на 5. Число n при делении на 5 может давать остатки от 0 до 4; иначе говоря, число n может иметь один из следующих пяти видов: $5m,\ 5m+1,\ 5m+2,\ 5m+3,\ 5m+4$, где $m \in \mathbb{Z}$. Для того, чтобы $9n+1$ делилось на 5, годится лишь $n = 5m+1$. Искать k, в принципе, уже не нужно. Сразу находим x:

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi(5m+1)}{5} = \\ = \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Метод оценок.

Идея метода:

Недостатки:

2. Метод применения универсальной тригонометрической подстановки.

Идея метода:

Недостатки:

3. Метод сведения уравнения к решению системы уравнений относительно новых переменных.

Идея метода:

Недостатки: